

Ass: les devoirs pour l'info (ENS) service d'envoi d'ENS

Développement 1: Mots bien parenthésés

I Mots de Dyck sur $\Sigma = \{a, b\}$

II Reconnaissance de Dyck

Objectif: formuler et manipuler les ensembles de mots bien parenthésés.

$$(5 + 2)(3 \times (1 + 1))$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ab aab b$$

I Mots de Dyck sur $\Sigma = \{a, b\}$

Définition 1: Soit $D \subseteq \Sigma^*$ l'ensemble

inductif défini par la relation

$$\frac{\varepsilon \in D}{\varepsilon \in D} \text{ (base)} \quad \frac{m \in D \quad u \in D}{m \cdot u \in D} \text{ (concat.)}$$

$$\frac{n \in D}{a \cdot m \cdot b \in D} \text{ (pair.)}$$

$w \in D \Rightarrow w$ est "un mot de Dyck" ou "bien parenthésé"

Exemple 2: $ab aab b \in D$

$$ab b a \notin D$$

Il ne suffit pas que $|w|_a = |w|_b$ pour que $w \in D$.

II Reconnaissance de Dyck

Propriété: Soit $w \in \Sigma^*$

alors: $w \in D$?

A) Caractérisation

Propriété 3: $w \in D$ si et seulement si $P(w) =$

$$|w|_a = |w|_b \text{ et pour tout préfixe } u \text{ de } w, |u|_a \geq |u|_b$$

Preuve 3: $\Rightarrow$: induction structurale sur D .

(base): Soit $w = \varepsilon$.

(pas): Soit $m \in D$.

$$|a \cdot m \cdot b|_a = |m|_a + 1 = |m|_b + 1 = |a \cdot m \cdot b|_b$$

H.I.

Soit u un préfixe de $a \cdot m \cdot b$. 3 cas:

$n(a) + 1$
 i) $v = \varepsilon$.
 ii) $v = a u b$.
 Alors $|v| = 1 + |u| = 1 + |u|$.
 (cas d'égale) $|u| = 1 + |u|$
 i) $v = a u'$ où u' est préfixe de u .
 Par l'IR, $m_b(u') \leq m_a(u')$
 ie $m_b(v) \leq m_a(u') + 1$
 $\leq m_a(v)$
 (concat) : dénominateur similaire.
 $\Leftarrow$: Récurrence forte sur $m = |v|$.
 Induction : $\varepsilon \in D$.
 Hypothèse : Soit $w \in \Sigma^{n+1}$
 On suppose le prop. vraie pour tout w' de taille $\leq n$.
 $w = w_0 w_1 \dots w_n$

$\varphi : \mathbb{I}_0, m, D \rightarrow \mathbb{N}$
 $i \mapsto m_a(w_0 \dots w_i) - m_b(w_0 \dots w_i)$
 On suppose de $i_{\min} = \min \{i / \varphi(i) = 0\}$
 Deux cas :
 i) $i_{\min} = m$
 ie $w = a u' b$
 Soit w un préfixe de w' .
 $\varphi(i) \geq 1 \forall i \leq |w'|$
 donc $|a u'|_a - |a u'|_b \geq 1$
 ie $|w'|_a \geq |w'|_b$
 Donc $w' \in D$.
 Par HI, $w' \in D$.
 Par (Parité), $w \in D$.

i1)

$i_{min} \in \mathbb{I}_A, m \cdot n$

2. $w =$

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}
w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}

$\varphi(i) = 0$ donc $m_a(w) = m_b(w')$

En HI, $w' \in D$.

De plus, $m_a(w) - m_b(w) = 0$

$$= m_a(w') - m_b(w') + m_a(w'') - m_b(w'')$$

donc $m_a(w'') - m_b(w'') = 0$

De manière analogue, tout préfixe de w'' a pour sa pré de b.

Donc $w'' \in D$.

En (cont), $w \in D$.

B] Algorithme

Algorithme 5 : Reconnaissance de Dyck

Entrée : w : chaine away) *ellipse*
Sortie : bool

let est-ayde (w : chaine away) : bool =

let $i = \text{ref } 0$

and $m = \text{Array.length } w$

and pile = ref 0 in

while !pile >= 0 && !i < m do

if $w.(i) = 'a'$

then incv pile

else if $w.(i) = 'b'$

then decv pile

done;

!pile = 0 ;;

Complexité : $O(|w|)$ en temps.