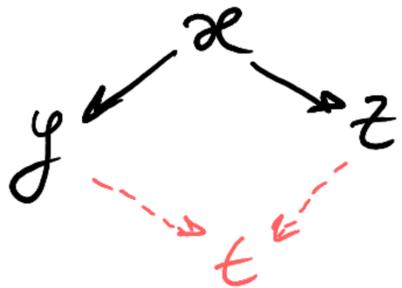


Lemme de Newman

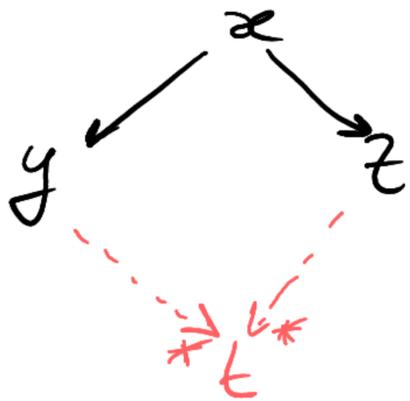
Motivation: Démonstration d'une propriété non triviale à l'aide des inductions bien fondées.

On pose pour tout le développement E un ensemble et \rightarrow une relation binaire sur E . On note \rightarrow^* sa clôture réflexive et transitive.

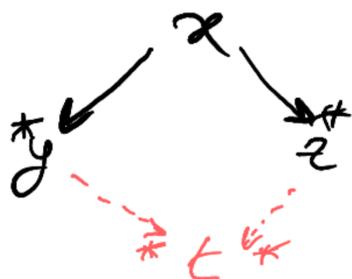
Définition: On dit que \rightarrow satisfait la propriété de losange si $\forall x, y, z \in E$,
 $x \rightarrow y$ et $x \rightarrow z$ et $y \neq z \Rightarrow \exists t \in E, y \rightarrow t$ et $z \rightarrow t$.



Définition: On dit que \rightarrow est localement confluent si $\forall x, y, z \in E$,
 $x \rightarrow y$ et $x \rightarrow z \Rightarrow \exists t \in E, y \rightarrow^* t$ et $z \rightarrow^* t$.



Définition: On dit que \rightarrow est confluent si $\forall x, y, z \in E$,
 $x \rightarrow^* y$ et $x \rightarrow^* z \Rightarrow \exists t \in E, y \rightarrow^* t$ et $z \rightarrow^* t$.



Exemple : $E = \{0, 1, 2, 3\}$



\rightarrow est localement confluent, mais n'est pas confluent et ne satisfait pas la propriété du losange.



\rightarrow est localement confluent, confluent et vérifie la propriété du losange.

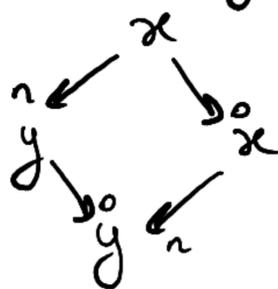
Propriété : Si \rightarrow satisfait la propriété du losange, alors \rightarrow est confluent.

Preuve : On pose : $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$P_{n,m}$: " $\forall x, y, z \in E$, $x \rightarrow^n y$ et $x \rightarrow^m z \Rightarrow \exists t \in E$, $y \rightarrow^* t$ et $z \rightarrow^* t$ ".

On raisonne par induction bien fondée sur $(\mathbb{N}^2, \leq_{lex})$ (où \leq_{lex} est l'ordre lexicographique).

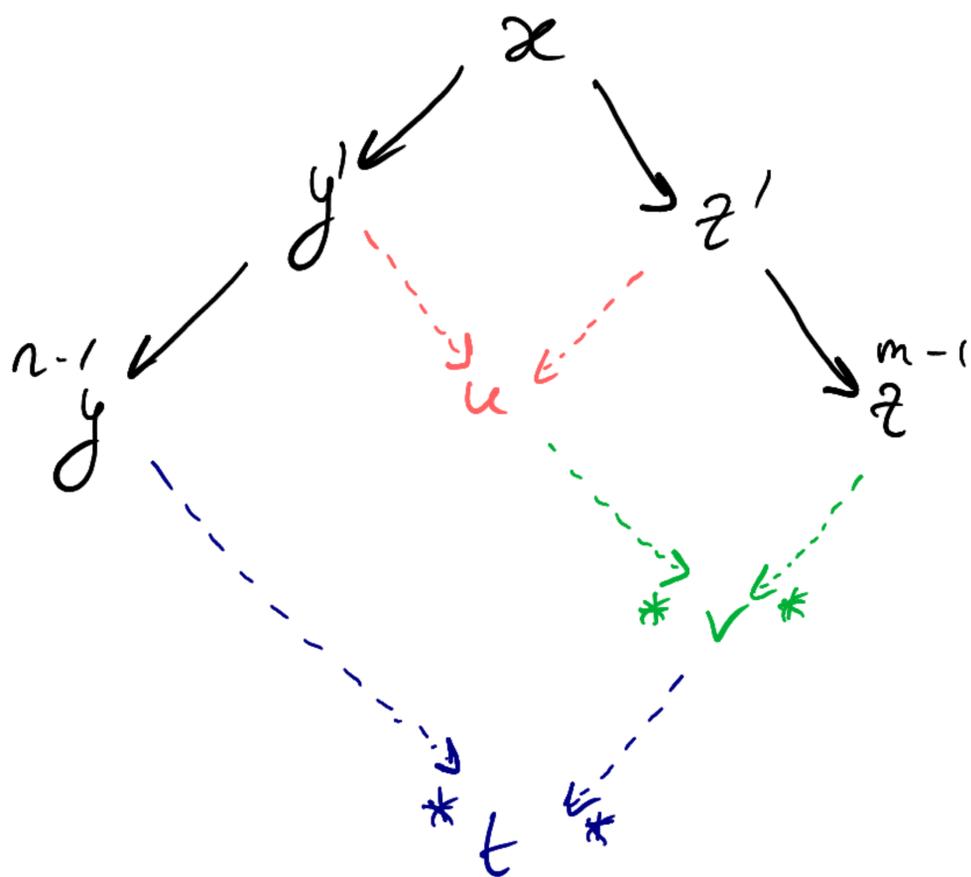
• Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Si $n=0$ ou $m=0$, alors on a : $\forall x, y, z \in E$, $x \rightarrow^n y$ et $x \rightarrow^0 z$ (sans perte de généralité), donc $x=y=z$, d'où :



donc OK.

• Sinon, $n \neq 0$ et $m \neq 0$. Soient $x, y, z \in E$ tq $x \rightarrow^n y$ et $x \rightarrow^m z$.

Alors, $\exists y', z' \in E$ tq



u : propriété du losange

v : HI sur $(1, m-1)$

t : HI sur $(n-1, \bullet)$

Donc : $\exists t \in E, y \rightarrow^* t$ et $z \rightarrow^* t$.

Donc $\forall n, m \in \mathbb{N}, P_{n,m}$ est vraie.

Lemme de Newman, Si \rightarrow est localement confluente et pu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \rightarrow x_{n+1}$ alors \rightarrow est confluente.

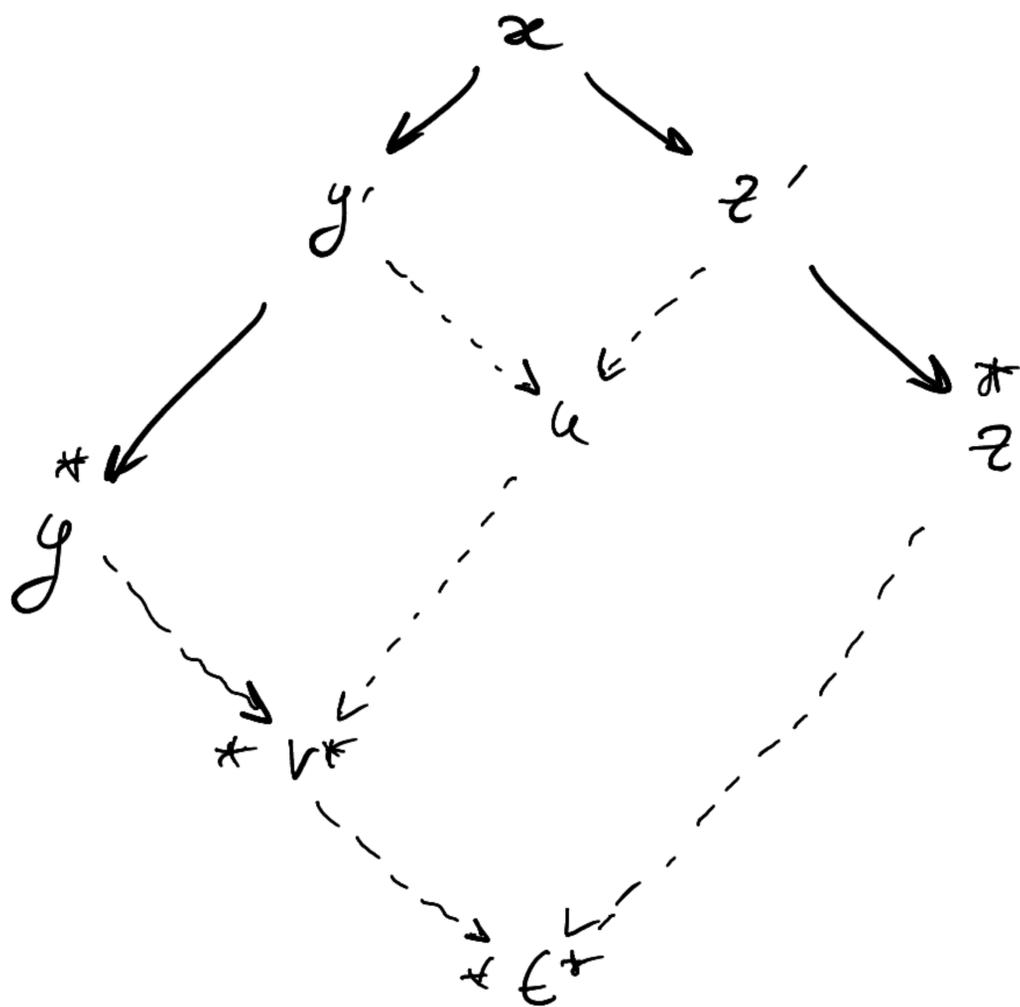
Preuve: Par hypothèse $\rightarrow^{-1} = \leftarrow$ est bien fondée.

On pose: $P(x) : \forall y, z \in E, x \rightarrow^* y$ et $x \rightarrow^* z \Rightarrow \exists t \in E, y \rightarrow^* t$ et $z \rightarrow^* t$.

Par induction bien fondée sur \leftarrow : soit $x \in E$ tel que $(\forall x' \in E, x' \leftarrow x \Rightarrow P(x'))$.

Soient $y, z \in E$ tq $x \rightarrow^* y$ et $x \rightarrow^* z$. Si $x = y$ ou $x = z$, alors le résultat est immédiat.

Si on a le diagramme suivant:



u : confluence locale
 v : HI sur $P(y')$
 t : HI sur $P(z')$

Donc $P(x)$ vraie $\forall x \in E$.