Lemme de Newman

Motivation : Démonstration d'une propriété non triviale à l'aide des inductions bien fondées.

On pose pour tout le développement E un ensemble et $\rightarrow$ une relation binaire sur E. On note $\rightarrow^*$ sa clôture réflexive et transitive.

Définition : On dit que $\rightarrow$ satisfait la propriété du losange si $\forall x, y, z \in E$,
$x \rightarrow y$ et $x \rightarrow z$ et $y \neq z \Rightarrow \exists t \in E, y \rightarrow t$ et $z \rightarrow t$.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y \arrow[dr, dashed] & & z \arrow[dl, dashed] \\ & t & \end{tikzcd}$$

Définition : On dit que $\rightarrow$ est localement confluente si $\forall x, y, z \in E$,
$x \rightarrow y$ et $x \rightarrow z \Rightarrow \exists t \in E, y \rightarrow^* t$ et $z \rightarrow^* t$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y \arrow[dr, dashed, "*"'] & & z \arrow[dl, dashed, "*"] \\ & t & \end{tikzcd}$$

Définition : On dit que $\rightarrow$ est confluente si
$\forall x, y, z \in E$,
$x \rightarrow^* y$ et $x \rightarrow^* z \Rightarrow \exists t \in E, y \rightarrow^* t$ et $z \rightarrow^* t$.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ y \arrow[dr, dashed, "*"'] & & z \arrow[dl, dashed, "*"] \\ & t & \end{tikzcd}$$

Exemple : $E = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{tikzcd} 0 & 1 \arrow[l] \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[l, bend left] \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ est localement confluente, mais n'est pas confluente et ne satisfait pas la propriété du losange.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left] & 1 \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ est localement confluente, confluente et vérifie la propriété du losange.

Propriété : Si $\rightarrow$ satisfait la propriété du losange, alors $\rightarrow$ est confluent.

Preuve : On pose : $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

$P_{n,m}$: " $\forall x, y, z \in E$, $x \rightarrow^n y$ et $x \rightarrow^m z \Rightarrow \exists t \in E, y \rightarrow^* t$ et $z \rightarrow^* t$ ".

On raisonne par induction bien fondée sur $(\mathbb{N}^2, \leq_{lex})$ (où $\leq_{lex}$ est l'ordre lexicographique).

- Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Si $n = 0$ ou $m = 0$, alors on a : $\forall x, y, z \in E$, $x \rightarrow^n y$ et $x \rightarrow^0 z$ (sans perte de généralité), donc $x = z$, d'où :

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "n"'] \arrow[dr, "0"] & \\ y \arrow[dr, "0"'] & & x \arrow[dl, "n"] \\ & y & \end{tikzcd}$$

donc ok.

• Sinon, $n \neq 0$ et $m \neq 0$. Soient $x, y, z \in E$ tq $x \to^n y$ et $x \to^m z$.
Alors, $\exists y', z' \in E$ tq

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & y' \arrow[dl, "n-1"'] \arrow[dr, dashed] & & z' \arrow[dr, "m-1"] \arrow[dl, dashed] & \\
y \arrow[ddrr, dashed, "*"'] & & u \arrow[dr, dashed, "*"] & & z \arrow[dl, dashed, "*"'] \\
 & & & v \arrow[dl, dashed, "*"] & \\
 & & t & &
\end{tikzcd}$$

u : propriété du losange

v : HI sur $(1, m-1)$

t : HI sur $(n-1, \bullet)$

Donc : $\exists t \in E$, $y \to^* t$ et $z \to^* t$.

Donc $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $P_{n,m}$ est vraie.

Lemme de Newman : Si $\to$ est localement confluente et qu'il n'existe pas de suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \to x_{k+1}$ alors $\to$ est confluente.

Preuve : Par hypothèse $\to^{-1} = \leftarrow$ est bien fondée.
On pose : $P(x)$: « $\forall y, z \in E$, $x \to^* y$ et $x \to^* z \Rightarrow \exists t \in E$, $y \to^* t$ et $z \to^* t$ ».
Par induction bien fondée sur $\leftarrow$: soit $x \in E$ tel que $(\forall x' \in E,\ \underbrace{x' \leftarrow x}_{\text{i.e } x \to x'} \Rightarrow P(x'))$.

Soient $y, z \in E$ tq $x \to^* y$ et $x \to^* z$. Si $x = y$ ou $x = z$, alors le résultat est immédiat.

Sinon, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & y' \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, dashed] & & z' \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, "*"] & \\
y \arrow[dr, dashed, "*"'] & & u \arrow[dl, dashed, "*"] & & z \arrow[ddll, dashed, "*"] \\
 & v \arrow[dr, dashed, "*"'] & & & \\
 & & t & &
\end{tikzcd}$$

u : confluence locale

v : HI sur $P(y')$

t : HI sur $P(z')$

Donc $P(x)$ vraie $\forall x \in E$.