

Correction du tri par sélection par la logique de Hoare

Motivation : Donner un exemple intuitif mais non trivial à prouver formellement à l'aide des triplets de Hoare.

Règles de la logique de Hoare utilisée :

$$\frac{\{ \varphi \} pg^1 \{ \theta \} \quad \{ \theta \} pg^2 \{ \psi \}}{\{ \varphi \} pg^1; pg^2 \{ \psi \}}$$
$$\frac{}{\{ \varphi \} x := e \{ \varphi[x \leftarrow e] \}}$$

$$\frac{\{ \varphi \wedge c \} pg^1 \{ \psi \} \quad \{ \varphi \wedge \neg c \} pg^2 \{ \psi \}}{\{ \varphi \} \text{if } c \text{ then } pg^1 \text{ else } pg^2 \{ \psi \}}$$

$$\frac{}{\{ \varphi \} \text{skip} \{ \varphi \}}$$

$$\frac{\{ I \wedge c \} pg \{ I \}}{\{ I \} \text{while } c \text{ do } pg \{ I \wedge \neg c \}}$$

(On ne précise pas tous les ensembles de définition pour des raisons de temps.)

On veut prouver formellement le tri par sélection à l'aide de cette logique de Hoare.

Fonction tri-selection(T):

$n := |T|$

$i := 1$

$\{n = |T| \wedge i = 1 \wedge T[1:n] \text{ trié } \wedge T = \text{id}(in)\}^*$

while $i \leq n$

$\{n = |T| \wedge i \in [1:n] \wedge T[1:i] \text{ trié } \wedge i \geq 2 \Rightarrow (\forall j \in [i:n], T[j] \geq T[i]) \wedge T = \sigma(in)\}$

$i_{\min} := \text{arg min}(T, i)$

$\{*\} \wedge i_{\min} \in [i:n] \wedge \forall j \in [i:n], T[i_{\min}] \leq T[j]$

exchange(T, i, i_{\min})

$\{*\} \wedge \forall j \in [i:n], T[i] \leq T[j]$

$\Rightarrow \{n = |T| \wedge i \in [1:n+1] \wedge T[1:i] \text{ trié } \wedge i \geq 2 \Rightarrow (\forall j \in [i:n], T[j] \geq T[i]) \wedge T = \sigma(in)\}$

$i := i + 1$

$\{*\}$

$\{*\} \Rightarrow \{T[1:n+1] \text{ trié } \wedge T = \sigma(in)\}$

$\Leftrightarrow \{T[1:n] \text{ trié } \wedge T = \sigma(in)\}$

Fonction echanger(T, i, j)

$\{\emptyset\}$

tmp := T[i]

$\{\emptyset [\text{tmp} \leftarrow T[i]]\}$

T[j] := T[i]

$\{\emptyset [T[i] \leftarrow \text{tmp}, T[j] \leftarrow T[i]]\}$

T[i] := tmp

$\{\emptyset [\text{tmp} \leftarrow T[i], T[j] \leftarrow T[i], T[i] \leftarrow \text{tmp}]\}$

Function $\text{arg min}(T[i])$:

$n := |T|$

$\text{min} := T[i]$

$\{ \text{min} = T[i] \}$

$i_{\text{min}} := i$

$\{ i_{\text{min}} = i \wedge \text{min} = T[i_{\text{min}}] \}$

$j := i$

$\{ i_{\text{min}} = i \wedge \text{min} = \min(T[j], j \in [i, n]) \wedge \text{min} = T[i_{\text{min}}] \}$

while $j \leq n$ do

$\{ i_{\text{min}} \in [i, n] \wedge j \in [i, n] \wedge \text{min} = \min(T[j], j \in [i, n]) \wedge \text{min} = T[i_{\text{min}}] \}$

if $T[j] < \text{min}$ then

$i_{\text{min}} := j$

$\text{min} := T[j]$

else

skip

return i_{min}