Union - find

On suppose déjà vu : • l'union par rang
• compression de chemins (ds le plan)

On définit $2\uparrow\uparrow n$ inductivement par

$$\begin{cases} 2\uparrow\uparrow 0 = 1 \\ 2\uparrow\uparrow(n+1) = 2\uparrow(2\uparrow\uparrow n) \end{cases} \qquad 2\uparrow\uparrow k = \left.2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}\right\} k \text{ fois}$$

On définit $\log^*(n)$ comme l'unique k tel que

$2\uparrow\uparrow k \leq n < 2\uparrow\uparrow(k+1)$

Complexité amortie : On fait m appels à Union/Find sur n éléments

Union = 2 appels à find (cf plan)

$\boxed{\text{On fait } m \text{ appels à find.}}$

Prop 1 : rg strictement croissant le long d'une branche

Prop 2 le rg d'un elt augmente de 1 en 1, et est fixé à jamais s'il n'est plus racine.

Prop 3 : Si x est racine, alors son sous-arbre a au moins $2^{rg(x)}$ noeuds.

Prop 4 : au plus $\frac{n}{2^r}$ elts de rg r ou plus

Preuve :

Soit x un elt de rang r ou plus. Soit C_x les descendants de x lorsque son rang est devenu r. On a $|C_x| \geq 2^r$

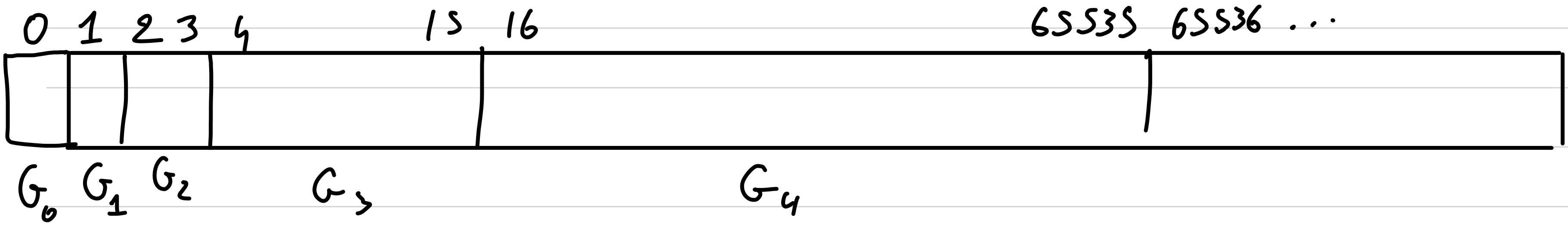
et $\forall x, y$ de rang r ou plus, $C_x \cap C_y = \emptyset$

En effet, soit u un elt quelconque, et (p_i) la suite des rangs du représentant de u.
(p_i) est croissant et ne passe de $r-1$ à r qu'une fois. donc u appartient à un seul C_x.

$n \geq \sum |C_x| \geq |\{x \mid rg(x) \geq r\}| \cdot 2^r$

On range les éléments dans des groupes G_i

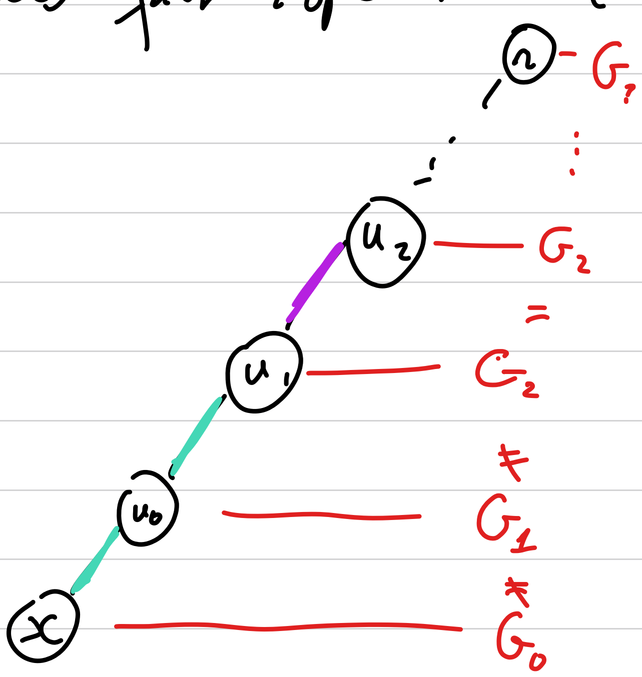
$G_i = \{x \in [\![1,n]\!],\ 2\uparrow\uparrow i \le rg(x) < 2\uparrow\uparrow(i+1)\}$



On regarde un appel à Find(x)

Soit $x = u_0 \to u_1 \to u_2 \cdots \to u_k = r$ la branche d'appels

l'appels fait k opérations (1 pour chaque élt de la branche)



On peut se limiter à la complexité des arêtes.
On utilise la méthode comptable.

il y a $O(\log^*(n))$ groupes G_i, donc pas plus de $\log^*(n)$ arêtes par appel à find

↳ $O(m \log^*(n))$

On attribue le coût de $u_i — u_{i+1}$ à l'élément u_i lorsque u_i et u_{i+1} st ds le m̂ groupe.

u_i n'est pas racine !

Pour chaque u non racine à la fin des appels.

- u n'a pas changé de groupe depuis qu'on lui attribue des coûts.
- $rg(p(u))$ est strictement croissant et est dans le même groupe que u.

Donc u n'a du coût qu'au plus $|G(u)|$ fois

On considère G_i. le coût d'un elt de $G_i \leq 2\uparrow\uparrow(i+1)$

il y a au plus $\frac{n}{2^{2\uparrow\uparrow i}}$ rels elts

Donc le coût des elts de G_i est d'au plus $2^{2\uparrow\uparrow i} \cdot \frac{n}{2\uparrow\uparrow(i+1)}$

$= n$

Or il y a $\log^*(n)$ groupes

$\hookrightarrow$ $n \log^*(n)$

$\hookrightarrow$ $(m+n)\log^*(n)$