

Problème: Entrée: une liste L de n entiers distincts, n étant impair
 Sortie: la médiane de L

Exemple: $L = [7, 12, 1, 4, 8, 6, 10, 2, 11]$

$L^* = [1, 2, \overbrace{4}, 6, \overbrace{7}, 8, \overbrace{10}, \overbrace{11}, \overbrace{12}]$ $R = [4, \underbrace{6}_d, 10, \underbrace{11}_u, 12]$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{l_d = 2} \quad \vdots \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{l_u = 1}$

$C = [4, 6, 7, 8, 10, 11]$
 $(5-2)^e$ élément

MEDIANE (L):

Choisir aléatoirement $\lceil n^{3/4} \rceil$ éléments de L dans R

Trier (R)

$d \leftarrow R[\lfloor \frac{1}{2} n^{3/4} - \sqrt{n} \rfloor]$

$u \leftarrow R[\lceil \frac{1}{2} n^{3/4} + \sqrt{n} \rceil]$

$C \leftarrow \{x \in L, d \leq x \leq u\}$

$l_d \leftarrow |\{x \in L, x < d\}|$

$l_u \leftarrow |\{x \in L, u < x\}|$

Si $l_d > \frac{n}{2}$ ou $l_u > \frac{n}{2}$ ou $|C| > 4n^{3/4}$:

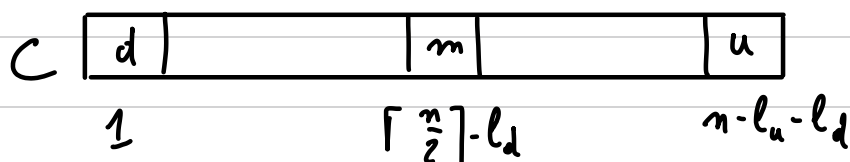
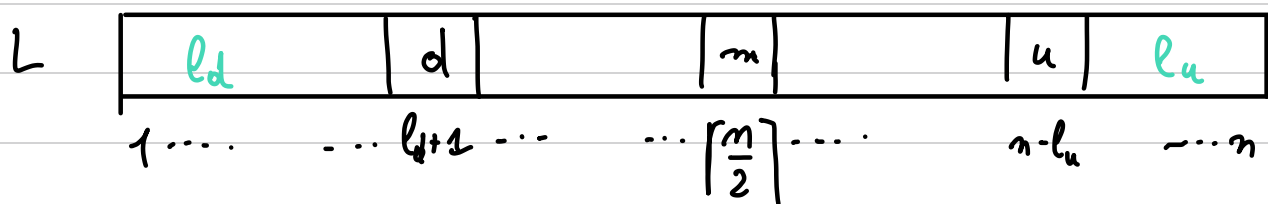
Erreur

Trier (C)

Renvoyer $C[\lceil \frac{n}{2} \rceil - l_d]$

Propriété 1: la complexité en temps de MEDIANE est $O(n)$

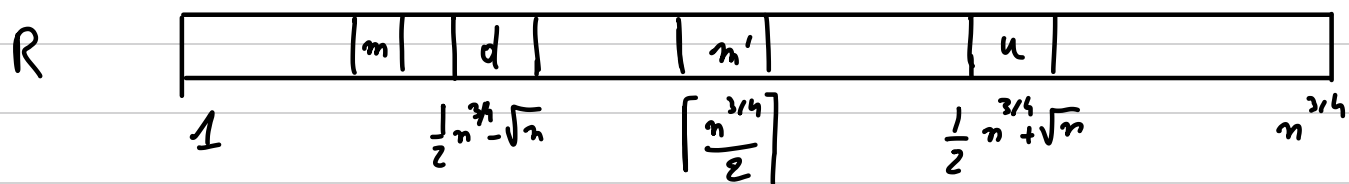
Propriété 2: Si MEDIANE ne renvoie pas Erreur, il renvoie la médiane de L .



Probabilité de renvoi Eneur:

$$E_{neur} = (d > m) \cup (u < m) \cup (|C| > 4n^{3/4})$$

$$P(E_{neur}) \leq P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$



E_2 = "moins de $\frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n}$ éléments dans R sont inférieurs ou égaux à m"

Soit x_i le ième élément choisi dans R.

$$X_i = 1 \mid x_i \leq m \quad P(X_i = 1) = \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$E_2 = \left(\sum_{i=1}^{\frac{n^{3/4}}{2}} X_i < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n} \right)$$

Tchebychev:

$$P(|X - E(X)| > \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$$

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^{\frac{n^{3/4}}{2}} X_i \right) = \frac{n^{3/4}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) \leq \frac{1}{4}n^{3/4}$$

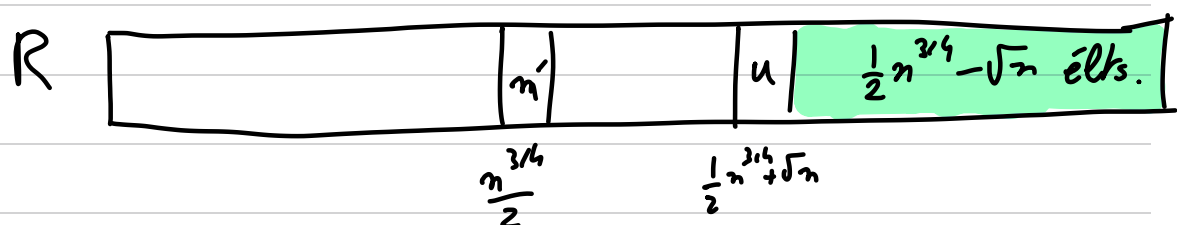
$$\begin{aligned} P_n(E_2) &= P_n \left(\sum_{i=1}^{\frac{n^{3/4}}{2}} X_i < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n} \right) \\ &\leq P_n \left(\left| \sum_{i=1}^{\frac{n^{3/4}}{2}} X_i - E \left(\sum_{i=1}^{\frac{n^{3/4}}{2}} X_i \right) \right| > \sqrt{n} \right) \\ &\leq \frac{\text{Var} \left(\sum_{i=1}^{\frac{n^{3/4}}{2}} X_i \right)}{n} \leq \frac{1}{4}n^{-1/4} \end{aligned}$$

De même $P_n(E_2) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}$

On note $C_1 = \{x \in C \mid x \leq m\}$
 $C_2 = \{x \in C \mid x > m\}$

On a $E_3 = |C| > 4n^{3/4} \subseteq (|C_1| > 2n^{3/4}) \cup (|C_2| > 2n^{3/4})$
 $= E_{3,1} \cup E_{3,2}$

Si $E_{3,2}$ est vérifié alors



au moins $\frac{1}{2} n^{3/4} - \sqrt{n}$ elts dans R parmi les $\frac{n}{2} - 2n^{3/4}$ plus grands de L

$X_i = 1$ le ième élément de R parmi les $\frac{n}{2} - 2n^{3/4}$ plus grands de L

$E_{3,2} \subseteq \left(\sum_{i=1}^{n^{3/4}} X_i \geq \frac{1}{2} n^{3/4} - \sqrt{n} \right)$

$E\left(\sum_{i=1}^{n^{3/4}} X_i\right) = \frac{n}{2} - 2n^{3/4}$

$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n^{3/4}} X_i\right) = n^{3/4} \left(\frac{1}{2} - 2n^{-1/4}\right) \left(\frac{1}{2} + 2n^{-1/4}\right) \leq \frac{1}{4} n^{3/4}$

Finalement $P_1(\text{Erreur}) \leq P_2(E_1) + P_2(E_2) + P_2(E_{3,1}) + P_1(E_{3,2})$
 $\leq n^{-1/4}$

