

Additionneur CLA

Motivation: Additionneur rapide permettant de réduire le temps d'addition comparé aux additionneurs classiques.

Il est encore très largement aujourd'hui.

$$\begin{array}{r} \text{C} \quad \downarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \leftarrow \uparrow \\ \text{A} \quad \underline{1} \underline{1} \underline{1} \underline{1} \underline{0} \underline{1} \underline{1} \underline{0} \underline{0} \\ + \text{B} \quad \quad \quad 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \hline = \text{S} \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

↑ : génère
← : propage
↓ : place la retenue

$$\begin{cases} s_i = a_i \oplus b_i \oplus c_i \\ c_{i+1} = \underbrace{a_i \cdot b_i}_{g_i} + \underbrace{(a_i \oplus b_i) \cdot c_i}_{p_i} \end{cases}$$

g_i : génération d'une retenue

p_i : propagation d'une retenue

On génère une retenue si a_i et b_i sont égaux à 1.

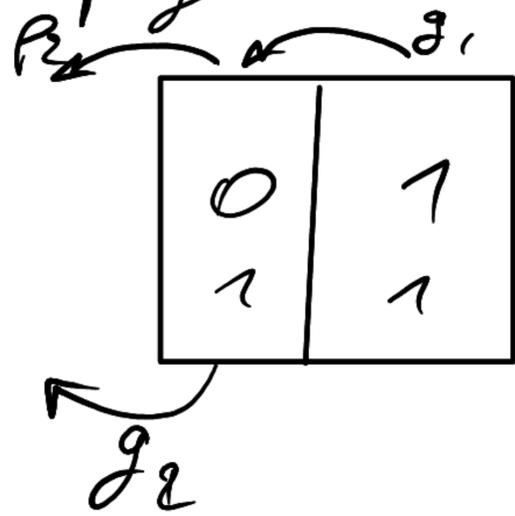
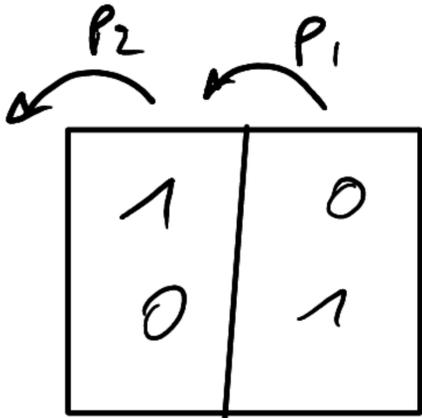
On propage une retenue si $a \text{ xor } b$ est égal à 1.

Donc :

$$\begin{cases} g_i = a_i \cdot b_i \\ p_i = a_i \oplus b_i \end{cases}$$

Note: Si $a_i = b_i = c_i = 1$, alors on ne propage pas : on génère une nouvelle retenue.

On étend la génération / propagation à un bloc :



On propage si $p_1, p_2 = 1$
 donc : $P_{\text{bloc}} = p_1, p_2$

On génère si $g_1, p_2 = 1$ ou $g_2 = 1$
 donc : $G_{\text{bloc}} = g_1, p_2 + g_2$

On généralise ce processus avec l'application \circ :

$$(g_{i+1}, p_{i+1}) \circ (g_i, p_i) = (g_{i+1} + g_i p_{i+1}, p_{i+1} p_i).$$

On veut anticiper la i^{e} retenue.

On pose : $(G_i, P_i) = (g_i, p_i) \circ \dots \circ (g_1, p_1)$ avec

$G_i = c_{i+1}$ (par récurrence immédiate), donc $s_i = a_i \oplus b_i \oplus G_{i-1}$

Par définition, $(g_i, p_i) \neq (1, 1)$. On a :

- $(0, 0) \circ (g, p) = (0, 0)$
 - $(1, 0) \circ (g, p) = (1, 0)$
 - $(0, 1) \circ (g, p) = (g, p)$
- } absorbant à gauche
 } neutre à gauche

On a alors : \circ associative.

On peut montrer que le nombre de portes du plus long chemin est de $O(\log(n))$ (avec n le nombre de bits) contre $O(n)$ pour un additionneur classique.