

NP-complétude de la 3-colorabilité d'un graphe

On va effectuer une réduction depuis le problème 3-SAT, qui est NP-complet.

On considère une formule 3CNF φ ,

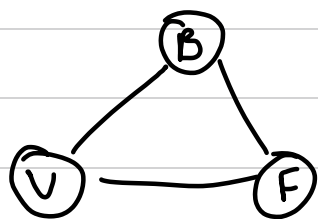
$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^k C_i \quad \text{avec } \forall i \in [1, k], C_i = l_{1,i} \vee l_{2,i} \vee l_{3,i}$$

On va construire un graphe G_φ tel que φ est satisfiable si et seulement si G_φ est 3-colorable.

Exemple. $\varphi_1 = (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

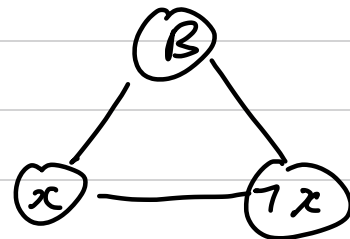
$$\varphi_2 = (x) \wedge (\neg x)$$

On commence par considérer une "palette" de 3 couleurs



- Vrai
- Faux
- Blanc

le but est de simuler une valuation des variables de φ via les couleurs Vrai et Faux

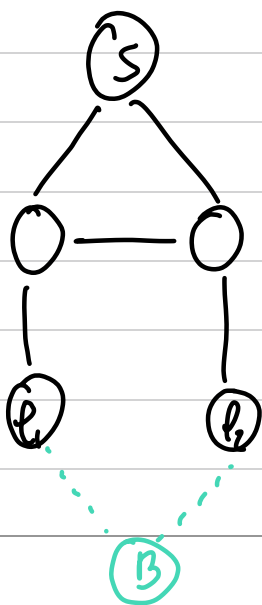


Pour toute variable x de φ ,

Il faut bien représenter les clauses.

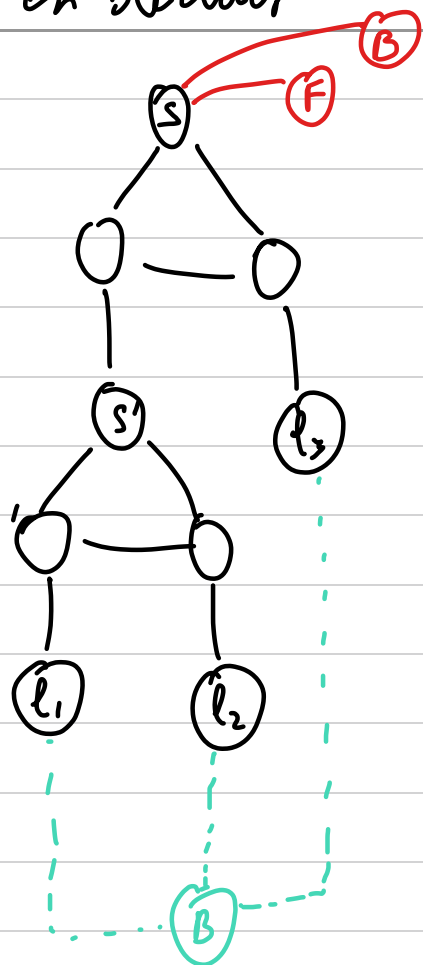
Soit l_1 et l_2 2 littéraux, on considère

On a les propriétés suivantes :



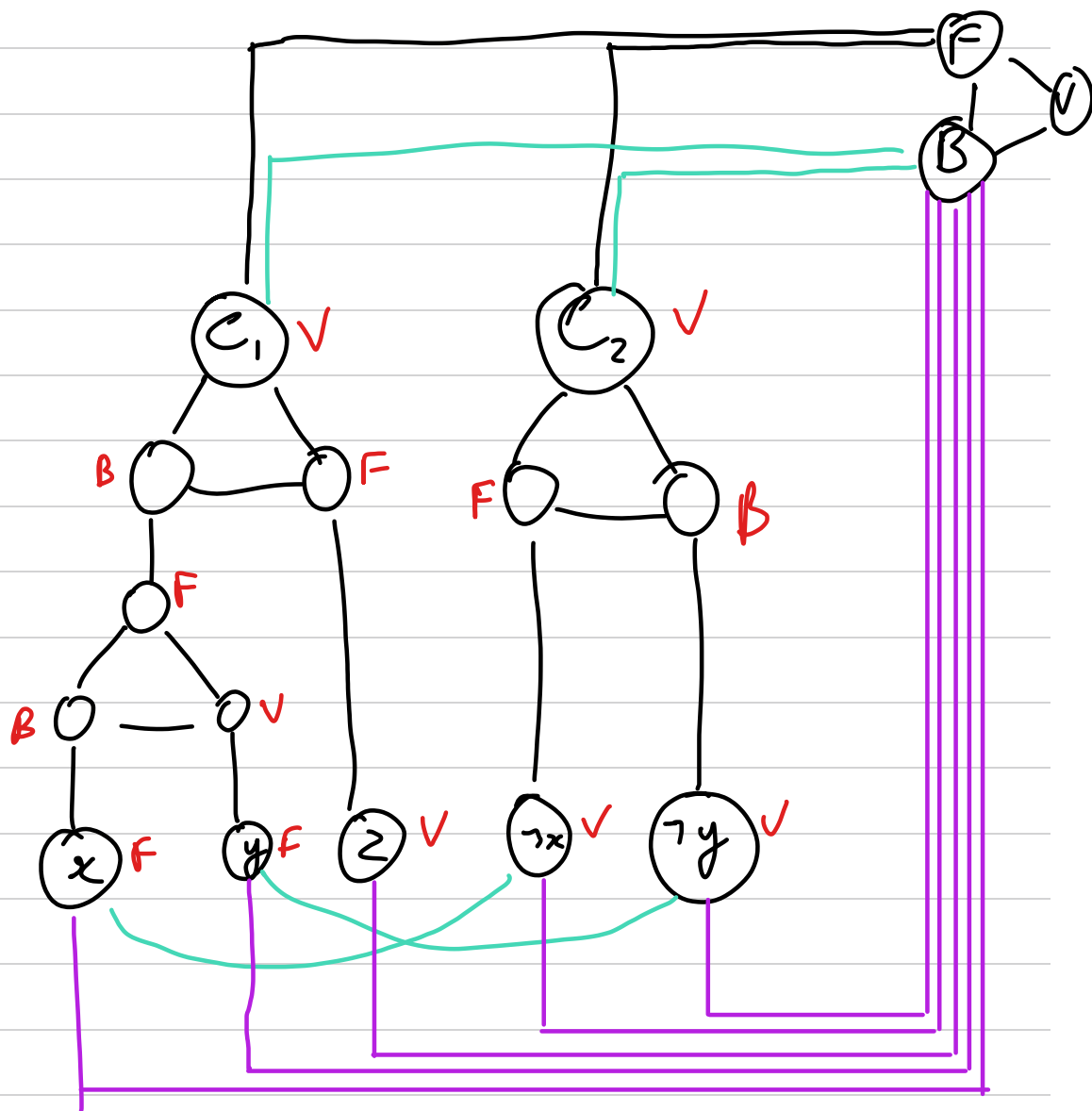
- S ne peut être colorié en blanc
- Si l_1 ou l_2 est Vrai, S peut être colorié en Vrai
- Si l_1 et l_2 sont Faux, S ne peut pas être colorié en Vrai.

In en sluit



- S peut être colorié en V si et seulement si:
 l_1 , ou l_2 ou l_3 l'est

$$(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$



Si φ est satisfiable, on colore les littéraux selon la valuation.

Chaque gadget C_i a au moins un littéral à vrai.

Donc on peut colorier C_i à vrai. G_φ est 3-colorable.

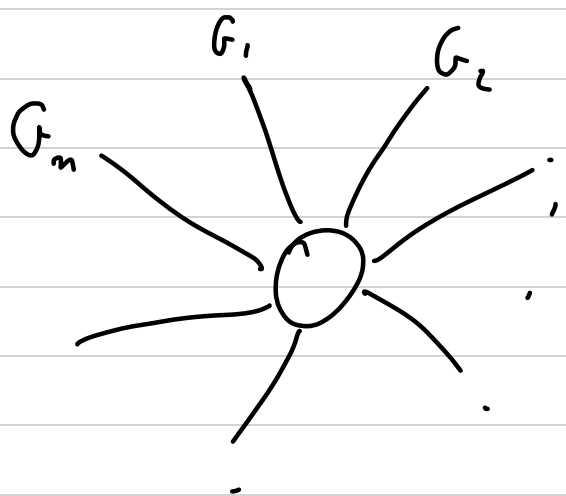
Si G_φ est 3-colorable,

On crée une valuation selon les couleurs des littéraux.

Chaque C_i est vrai, donc au moins un littéral par clause est vrai.

Finalement, $3\text{-CNF}(\varphi) \Leftrightarrow 3\text{COLOR}(G_\varphi)$

SI IL RESTE DU TEMPS



est 3-coloriable

si et seulement si

