

Ans : l'ordre

4. Principe d'induction

Niveau : MPEI (S2)

Principe : - Algorithmes et

programmation (S1), - Types et abstraction (S1),

- Vérification de la mémoire d'un programme (S1)

Introduction : introduction d'un sous

pour prouver la termination des

fonctions récursives.

exemple de la fonction de Ackermann :

$$A(0, m) = m + 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$A(m, 0) = A(m-1, 1) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$A(m, m) = A(m-1, A(m, m-1))$$

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$$

I Introduction structurelle

A] Ensemble inductif

Définition 1 : Soit E un ensemble. A

$B \subseteq E$ et une fonction $(R_i : E^{m_i} \rightarrow E)_{i \in I}$

$(m_i \in \mathbb{N}^*)$, on associe l'unique

ensemble X défini comme la plus

petite partie de E telle que :

$$i) B \subseteq X$$

$$ii) \forall i \in I, \forall (x_1, \dots, x_{m_i}) \in X^{m_i},$$

$$R_i(x_1, \dots, x_{m_i}) \in X.$$

X est appelé ensemble inductif. B est

le base et les R_i sont les opérateurs

d'induction.

Notation 2 : i) $\frac{b \in B}{b \in X}$ (existence)

$$ii) \frac{x_1 \in X \dots x_{m_i} \in X}{R_i(x_1, \dots, x_{m_i}) \in X} \quad (R_i)$$

Exemple 3 : a) N est inductif, avec

$$B = \{0\} \text{ et } R \text{ avec : } m \mapsto m+1$$

b) l'ensemble AB des arbres binaires est

inductif, avec

$$\frac{}{a \in AB} \text{ (existence)}$$

$$\frac{u_1 \in AB \quad u_2 \in AB}{u_1 \alpha u_2 \in AB} \quad (R_\alpha)$$

$$u_1 \in AB \quad u_2 \in AB \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 6 : Soit A un ensemble. Construire par induction structurée l'ensemble des listes d'éléments de A .

B) Intuitif

Tout élément de X peut être décrit naturellement par une disjonction de cas appelée "filage par motif" (pattern matching).

On a : match obj with

Exemple 5 : let rec hauteur (ab : AB) : int =

match ab with

! Bot $\rightarrow -1$

! Node(ag, -, ad) $\rightarrow 1 +$

max (hauteur ag) (hauteur ad)

C) Preuve par induction structurée

Théorème 6 : Soit X un ensemble associé à B et $(K_i)_{i \in I}$. Soit P un prédicat exprimant une propriété sur $x \in E$.

Si i) $\forall x \in B, P(x)$

induction

ii) $\forall i \in I,$

$\forall (x_1, \dots, x_{m_i}) \in X^{m_i},$

hérité

$P(x_1)$ et $P(x_2)$ et ... et $P(x_{m_i}) \Rightarrow P(K_i(x_1, \dots, x_{m_i}))$

Alors $\forall x \in X, P(x)$

Corollaire 7 : Soit f une fonction récursive définie sur X .

Si i) f termine sur B

ii) $\forall i \in I,$ pour tous paramètres d'appel

$x_1, \dots, x_{m_i},$ si $f(x_1, \dots, x_{m_i})$ termine,

alors $f(K_i(x_1, \dots, x_{m_i}))$ termine.

Alors f termine sur X .

Preuve 8 : On applique le théorème 6 à $P(x) =$

" $f(x)$ termine".

Exemple 8 : la fonction hauteur termine.

i) hauteur termine sur Bot (1).

ii) Si hauteur termine sur ad et ag, alors

hauteur termine sur Node(ag, -, ad) (cf. diagramme ci-dessous)

Remarque 10 : Si $X = \mathbb{N},$ alors le théorème 6 est le principe de récurrence.

II Application : Définition formelle d'une relation

Soit A un ensemble et R une relation

linéaire sur A .

Définition 11 : pour tout $(x, y) \in R,$ on note $x \rightarrow y$.

Définition 12 : À la relation $R,$ on associe le

graphe orienté $G_R = (A, R)$ appelé graphe de la relation R .

Définition 13: Soit R une relation binaire sur A , matrice $\rightarrow^*$, est la relation binaire sur A définie par induction structurale comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{x \rightarrow^* y}{x \rightarrow^* y} \text{ pour tout } x, y \in A \\ & \frac{x \rightarrow^* y \quad y \rightarrow^* z}{x \rightarrow^* z} \text{ pour tout } (x, y, z) \in A^3 \end{aligned}$$

Propriété 14: $x \rightarrow^* y$ si et seulement si y est accessible depuis x dans Gr .

Exercice 15: $\Rightarrow$: induction structurale
 $\Leftarrow$: récurrence sur n la longueur minimale d'un chemin de x à y

Application 16: Mots bien parenthésés ($\subseteq \cup \emptyset$)

III Induction bien fondée

A) Relation bien fondée

Définition 17: Soit E un ensemble. Une relation R sur E est dite lien fondée dans E s'il n'existe pas de suite infinie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n, x_{n+1}) \in R \forall n$.

Remarque 18: En pratique, on dit d'un ordre $\preceq$ qu'il est bien fondé dans E si $\preceq$ est une relation bien fondée dans E .

Exemple 19: Soit R bien fondée :

- i) $\leq$ dans $\mathbb{N}$
- ii) l'ordre produit $\leq_{\Pi}$ dans $X \times Y$ de deux ordres bien fondés sur X et Y , i.e. $(x, y) <_{\Pi} (x', y') \Leftrightarrow x <_X x' \text{ et } y <_Y y'$
- iii) l'ordre lexicographique $\leq_l$ dans $X \times Y$ de deux ordres bien fondés sur X et Y , i.e. $(x, y) <_l (x', y') \Leftrightarrow x <_X x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y <_Y y')$

Exemple 20: $\leq$ n'est pas bien fondé dans $\mathbb{Z}$.

B) Preuve par induction bien fondée

Définition 21: $x_m \in E$ est dit élément minimal pour R si pour tout $x' \in E$, $\neg (x' \rightarrow x_m)$

Exemple 22: Les éléments minimaux pour $\mid$ sur $\mathbb{N}$ sont les nombres premiers et 1.

Théorème 23: Soit R une relation bien fondée dans E . On note M l'ensemble de ses éléments minimaux. Soit P un prédicat sur E .

$$\text{Si } \begin{aligned} & \text{i) } \forall x \in M, P(x) \\ & \text{ii) } \forall x \in E, (\forall y \in E, (y, x) \in R \Rightarrow P(y)) \Rightarrow P(x) \end{aligned}$$

Alors $\forall x \in E, P(x)$

Exercice 24: Prouver la terminaison de A .

Exercice 25: Lemme de Noether ($\subseteq \cup \emptyset$)