

33. Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfaisabilité. Applications

Niveau : NP2I (S2) Résumé : - Structures de données hiérarchiques (S2) - Résumés et Induction (S1-S2)

Introduction : "image d'extension"

I Syntaxe de la logique propositionnelle

On considère un ensemble infini (énumérable) de propositions que l'on note p_0 .

Définition 1 : Les formules du calcul propositionnel sont définies par la syntaxe suivante :

$$\varphi ::= p \in \mathcal{P}_0 \mid \neg \varphi \mid \varphi \vee \varphi$$

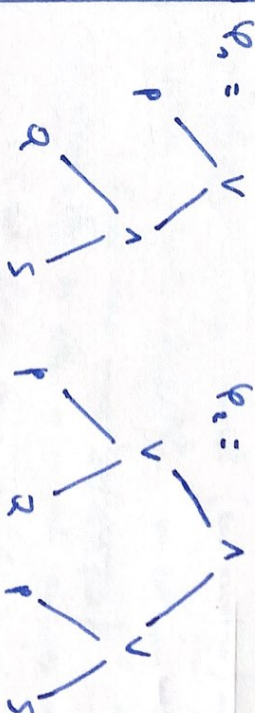
On étend cette syntaxe de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \top &\triangleq p \vee \neg p & (p \in \mathcal{P}_0) \\ \perp &\triangleq \neg \top \\ \varphi \wedge \psi &\triangleq \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \psi &\triangleq \neg \varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\triangleq (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Remarque 2 : Une formule propositionnelle est un arbre, dont les feuilles sont des propositions.

Exemple 3 : $(p, q, s) \in \mathcal{P}_0^3$



Définition 4 : La taille d'une formule φ est définie inductivement par la syntaxe étendue :

$$\begin{aligned} * | \top | &= | \perp | = 0 \\ * | p | &= 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_0 \\ * | \neg \varphi' | &= 1 + | \varphi' | \\ * | \varphi \circ \psi' | &= | \varphi' | + | \psi' | + 1 \end{aligned}$$

où $\circ \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

Remarque 5 : Les arbres sont syntactiques. Ils ne représentent pas (encore) notre intuition du vrai, du faux, etc...

II Sémantique

A) Sémantique de la logique propositionnelle

On définit le vrai et le faux par les symboles respectifs V et F , et on note $B = \{V, F\}$.

Définition 6 : Une interprétation propositionnelle est une fonction totale

$$I : P_0 \rightarrow B$$

Définition 7 : La vérification $\models$ est une relation $\models$ entre une formule φ et une interprétation I est définie inductivement par :

$$\models \varphi \models I \iff I(p) = V \text{ si } p \in P_0$$

$$\models \neg \varphi \models I \iff \text{non}(\models \varphi \models I)$$

$$\models \varphi \vee \psi \models I \iff \text{ou}(\models \varphi \models I, \models \psi \models I)$$

où $\text{non} : B \rightarrow B$ et $\text{ou} : B^2 \rightarrow B$ sont définies par :

b	b'	$\text{ou}(b, b')$	$\text{non}(b)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

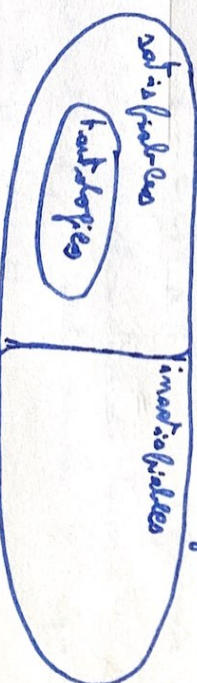
B) Validité d'une formule

Définition 8 : On dit qu'une interprétation I satisfait φ si $\models \varphi \models I = V$, et on note $I \models \varphi$. On appelle I modèle de φ .

Définition 9 : Une formule φ est :

- satisfiable si elle admet (au moins) un modèle
- valide si toute interprétation en est un modèle
- insatisfiable si elle n'admet aucun modèle

(φ est donc une antilogie)



Définition 10 : Une interprétation I satisfait un ensemble de formules S si

$$\forall \varphi \in S, I \models \varphi. \text{ On note : } I \models S.$$

Définition 11 : Une formule φ est une conséquence logique de S si pour toute interprétation I , $I \models S$ implique $I \models \varphi$.

Exercice 12 : Prouver que $S \cup \{\varphi\} \models \varphi \iff S \models \varphi$.

III Formes normales

Définition 15 : Deux formules φ et ψ sont logiquement équivalentes si pour toute interprétation I , $I \models \varphi$ si et seulement si $I \models \psi$. On note $\varphi \equiv \psi$.

Exercice 16 : Trouver les identités de De Morgan : $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$.
 ainsi que les distributivités respectives de $\vee$ et $\wedge$ par rapport à $\neg$ et $\vee$.

Remarque 17 : Les formules de l'exercice 3 sont équivalentes !

Définition 18 : Les formules en forme normale négative (NNF) sont définies inductivement :

$$\begin{aligned} \varphi &::= p \mid \neg p & (p \in \mathcal{R}_0) \\ \varphi &::= \varphi_1 \mid \varphi_2 \vee \varphi_1 \vee \varphi_2 \end{aligned}$$

Lemme 19 : Montrer que pour toute formule φ , il existe φ' en NNF qui lui est équivalente et pour sa construction de construction de φ' .

Définition 20 : Les formules normales disjonctives (DNF) sont définies inductivement :

$$\begin{aligned} \varphi &::= p \mid \neg p & (p \in \mathcal{R}_0) & \text{ (littérale)} \\ \varphi &::= \varphi_1 \mid \varphi_2 \wedge \varphi_1 & \text{ (clause disjonctive)} \\ \varphi &::= \varphi_1 \vee \varphi_2 & \text{ (formule DNF)} \end{aligned}$$

Remarque 21 : Si φ est en forme DNF, alors la lecture des clauses de φ me donne la table de vérité de φ .

Définition 22 : Les formules en forme normale conjonctive (CNF) sont définies inductivement :

$$\begin{aligned} \varphi &::= p \mid \neg p & (p \in \mathcal{R}_0) & \text{ (littérale)} \\ \varphi &::= \varphi_1 \mid \varphi_2 \vee \varphi_1 & \text{ (clause)} \\ \varphi &::= \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \text{ (formule CNF)} \end{aligned}$$

DM 23 : Transformation de Tait : à partir d'une formule φ , on peut calculer φ' équi-équivalente en temps $O(|\varphi|)$.

Proposition 24 : $SAT \rightarrow CNF$

Exercice : une CNF φ satisfiable ?
 Algorithme 25 : QUINÉ. (DEV 1)

Application 26 : 3 CNF est satisfiable ? (DEV 2)